Capítulo 6

Autovalores y autovectores. Forma canónica de Jordan

Introducción

Las matrices asociadas a un endomorfismo de un espacio vectorial en distintas bases son semejantes. Se pretende buscar una base del espacio vectorial en la cual la matriz que represente el endomorfismo sea lo más sencilla posible. Dicha matriz se denomina forma canónica de Jordan.

1. Autovalores y autovectores

1.1. Definición. Matrices semejantes

Dos matrices cuadradas A y B de orden n son semejantes si existe una matriz P regular tal que $B = P^{-1}AP$.

NOTA: *La matriz P se denomina matriz de paso.*

1.2. Propiedades de las matrices semejantes

a) Si A y B son semejantes $|A| = |B|$.
b) Si A y B son semejantes, entonces A^n y B^n son semejantes.
c) Si A es semejante a A^* y B a B^* con la misma matriz de paso P, entonces $\lambda A + \mu B$ es semejante a $\lambda A^* + \mu B^*$.
d) En general, si $B = P^{-1}AP$ y $f(A)$ es un polinomio en A, entonces $f(B) = P^{-1}f(A)P$.
e) Las matrices asociadas en distintas bases a un endomorfismo $f\colon E_n \longrightarrow E_n$ son semejantes.

1.3. Definición. Autovalores y autovectores de un endomorfismo

Dado $\lambda \in K$, donde K será $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, diremos que λ es un autovalor, o valor propio, de f si $\exists u \in E_n$, con $u \neq 0$ tal que $f(u) = \lambda u$. Entonces, u es un vector propio, o autovector, asociado al autovalor λ.

1.4. Definición. Polinomio característico y espectro de una matriz

Dada una matriz cuadrada A, llamamos polinomio característico asociado a A al polinomio $P(\lambda) = |A - \lambda I|$.

A la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se la denomina ecuación característica y sus soluciones son los autovalores de A. Al conjunto de autovalores de A se le denomina "espectro" de A.

Si λ es una raíz de $P(\lambda)$ de multiplicidad r, diremos que λ es un autovalor de A de multiplicidad r.

OBSERVACIONES:

1) Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de A se tiene

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{y} \qquad |A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

1.5. Definición. Subespacio invariante asociado a un autovalor

Dado un autovalor λ de A, el conjunto de todos los autovectores o vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial llamado subespacio propio o invariante que notaremos $N_{1\lambda}$ o $N_{1,\lambda}$.

$$N_{1\lambda} = \ker(A - \lambda I) = \{u \in E_n \ / \ Au = \lambda u\}$$

NOTAS:

1) Si λ tiene multiplicidad r, entonces $\dim N_{1\lambda} \leq r$.

1.6. Propiedades de los autovalores y autovectores de matrices relacionadas con una dada

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces

a) A y A^t tienen los mismos autovalores.

b) Si λ es autovalor de A, $k\lambda$ es autovalor de kA.

c) Si λ es autovalor de A, $\lambda - k$ es autovalor de $A - kI$.

d) Si λ es autovalor de A y A es regular, $\dfrac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.

e) Si B y A son semejantes, tienen el mismo polinomio característico y por tanto, los mismos autovalores.

f) Si λ es autovalor de A, λ^n es autovalor de A^n.

g) $\lambda = 0$ **es autovalor de** $A \iff \ker A \neq \{\overline{0}\}$ **y se tiene que** $N_{10} = \ker A$.

h) **Si** $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ **es un sistema de vectores propios no nulos asociados a autovalores distintos, es libre. Además, si** u **es autovector de** A **asociado a** λ**, entonces**

1) u **es vector propio de** kA **asociado al autovalor** $k\lambda$.

2) u **es vector propio de** $A - kI$ **asociado al autovalor** $\lambda - k$.

3) u **es vector propio de** A^{-1} **asociado al autovalor** $\dfrac{1}{\lambda}$.

4) u **es vector propio de** A^n **asociado al autovalor** λ^n.

1.7. Definición. Matrices estrictamente diagonalizables

Una matriz cuadrada A es estrictamente diagonalizable o simplemente diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal J, es decir, si existe una matriz regular P, llamada matriz de paso, tal que $J = P^{-1}AP$.

NOTA: *Una matriz A es diagonalizable si es posible encontrar una base de vectores propios para el endomorfismo f de matriz asociada A.*

En este caso, las columnas de la matriz de paso P son, precisamente, las coordenadas de los autovectores.

1.8. Teorema.

La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable es que la multiplicidad de cada autovalor λ sea igual a la dimensión del subespacio propio o invariante asociado a λ. $N_{1\lambda}$.

1.9. Cálculo de J y P asociadas a una matriz diagonalizable

Sea A una matriz de orden n diagonalizable. Supongamos que sus autovalores son λ_1, λ_2, …, λ_s de multiplicidades r_1, r_2, …, r_s con $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$. Si consideramos una base de cada subespacio $N_{1\lambda_i}$, $B_{N_{1\lambda_i}} = \{u_1^i, \ldots, u_{r_i}^i\}$, se tiene que

$$B = \{u_1^1, \ldots, u_{r_1}^1, \ldots, u_1^s, \ldots, u_{r_s}^s\}$$

es una base de E_n formada por vectores propios, en la cual la matriz del endomorfismo es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \overset{r_1)}{\ddots} & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \overset{r_s)}{\ddots} & \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$

Además $J = P^{-1}AP$ donde P es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores propios que forman la base B.

1.10. Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz cuadrada A sobre un cuerpo K, algebraicamente cerrado, es raíz de su polinomio característico. Es decir, $P(A) = \mathcal{O}_{n\times n}$.

2. Forma canónica de Jordan

Toda matriz cuadrada A sobre un cuerpo K, algebraicamente cerrado, es semejante a una matriz J diagonal por cajas, denominada forma canónica de Jordan asociada a A. Es decir, $J = P^{-1}AP$ con P regular. P se denomina matriz de paso.

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_2 & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & J_s \end{array}\right) \quad \text{y} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad J_i = (\lambda_i)$$

2.1. Cálculo de las matrices J y P

En la diagonal de J aparecen los autovalores de A repetidos tantas veces como su multiplicidad.

Si A es diagonalizable, es decir, existe una base de vectores propios, entonces J es diagonal.

Si A no es diagonalizable, entonces J tiene en la diagonal secundaria tantos unos como vectores no propios se necesitan en la construcción de una base de E_n.

2.2. Cálculo de las cajas

Se realizará para cada autovalor λ.

Sea λ un autovalor de multiplicidad r. Entonces puede ocurrir

a) $\dim N_{1\lambda} = r$, entonces existen r vectores propios asociados a λ, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ que constituyen una base de $N_{1\lambda}$ y la matriz asociada en dicha base es

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \overset{r)}{\ddots} & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

NOTA: *En este caso hay r cajas 1×1 asociadas al autovalor λ.*

b) $\dim N_{1\lambda} = s < r$. Entonces habrá s cajas asociadas a λ.

Se denota

$$N_{h\lambda} = \ker(A - \lambda I)^h = \{u \in E_n \;/\; (A-\lambda I)^h u = 0\}$$

y calculamos la cadena de subespacios

$$N_{1\lambda} \subset N_{2\lambda} \subset \cdots \subset N_{k-1,\lambda} \subset N_{k\lambda}$$

deteniendo el proceso en el paso k si $N_{k\lambda} = N_{k+1,\lambda}$, lo que sucederá si $\dim N_{k\lambda}$ es igual que la multiplicidad de λ.

Consideramos $H_{k\lambda}$ el subespacio suplementario de $N_{k-1,\lambda}$ en $N_{k\lambda}$ que notaremos $N_{k\lambda}/N_{k-1,\lambda}$ ó $N_{k\lambda} - N_{k-1,\lambda}$.

Sea $B_{N_{k\lambda}/N_{k-1,\lambda}} = \{u^1, \ldots, u^p\}$ una base de $N_{k\lambda}/N_{k-1,\lambda}$. Para cada vector tenemos una caja asociada, que se construye así

$$u^1 \in N_{k\lambda}/N_{k-1,\lambda}, u_1^1 = (A - \lambda I)u^1 \in N_{k-1,\lambda}, \ldots, u_{k-1}^1 = (A - \lambda I)u_{k-2}^1 \in N_{1\lambda}$$

y la caja asociada a $\{u^1, u_1^1, \ldots, u_{k-1}^1\}$ es

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \overset{k)}{\ddots} & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

De la misma forma se calculan las cajas para u^2, …, u^p.

Después ampliamos, si es posible, $\{u_1^1, \ldots, u_1^p\}$ a una base de $N_{k-1,\lambda}/N_{k-2,\lambda}$,

$$B_{N_{k-1,\lambda}/N_{k-2,\lambda}} = \{u_1^1, \ldots, u_1^p, u_1^{p+1}, \ldots, u_1^\ell\}$$

y se aplica el procedimiento anterior a los vectores u_1^{p+1}, …, u_1^ℓ. Análogamente, se procede con una base ampliada de $N_{k-2,\lambda}/N_{k-3,\lambda}$, realizando este proceso hasta conseguir una base ampliada de $N_{2\lambda}/N_{1\lambda}$.

Si el número h de cajas así obtenido es menor que $s = \dim N_{1\lambda}$, estas cajas se completan con $s - h$ cajas de orden 1. Los vectores asociados a estas cajas deben ser vectores propios, es decir de $N_{1\lambda}$, linealmente independientes con los ya obtenidos.

2.4. Potencias de una matriz. Exponencial de una matriz

Siendo A una matriz cuadrada de orden n con elementos reales y J su forma canónica de Jordan se tiene $A^h = PJ^hP^{-1}$, $h \in N$ y $e^A = Pe^JP^{-1}$. Por tanto el cálculo de potencias y exponenciales de matrices se reduce a efectuar dichos cálculos en formas canónicas de Jordan, lo que se hará por cajas.

a) Matriz estrictamente diagonalizable.

Si $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ entonces

$$J^h = \begin{pmatrix} \lambda_1^h & & & \\ & \lambda_2^h & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^h \end{pmatrix} \qquad e^J = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

b) Matriz no estrictamente diagonalizable.

$$\text{Si } J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix} \text{ entonces}$$

$$J^h = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^h} & & & \\ & \boxed{J_2^h} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_r^h} \end{pmatrix}, \qquad e^J = \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1}} & & & \\ & \boxed{e^{J_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{e^{J_r}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Sean } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } J,\ N \in M_{r_i \times r_i}.$$

Entonces $J_i = \lambda_i I + N$ y por tanto $J_i^h = (\lambda_i I + N)^h$, que se calcula utilizando el desarrollo del binomio de Newton y teniendo en cuenta que N es una matriz nilpotente (en este caso $N^{r_i} = \mathcal{O}$).

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{1!} & 1 & & & & \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(r_i-2)!} & \frac{1}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 & \\ \frac{1}{(r_i-1)!} & \frac{1}{(r_i-2)!} & \frac{1}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots = \\ &= PP^{-1} + PJP^{-1} + \frac{PJ^2P^{-1}}{2!} + \cdots + \frac{PJ^nP^{-1}}{n!} + \cdots = \\ &= P\left(I + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^n}{n!} + \cdots\right)P^{-1} = Pe^JP^{-1}. \end{aligned}$$

c) Cálculo de la matriz e^{At}.

Se verifica que $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$.

De modo análogo a los apartados anteriores $e^{Jt} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1t}} & & & \\ & \boxed{e^{J_2t}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{e^{J_rt}} \end{pmatrix}$.

Si $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{r_i \times r_i}$, se tiene

$$e^{J_it} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{t}{1!} & 1 & & & & \\ \frac{t^2}{2!} & \frac{t}{1!} & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{t}{1!} & 1 & \\ \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{t}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

---

3. *Sea A una matriz ortogonal. Probar que si λ es un autovalor de A también lo es $\frac{1}{\lambda}$.*

SOLUCIÓN:

Si λ es autovalor de A entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}. Al ser A ortogonal $A^{-1} = A'$. En consecuencia, $1/\lambda$ es autovalor de A'. Pero como una matriz y su traspuesta tienen los mismos autovalores, $1/\lambda$ será autovalor de $(A')' = A$.

---

4. *Se considera la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que 2 es un autovalor de A, hallar todos los autovalores de A.

SOLUCIÓN:

La suma de todas las filas de A es 1, por tanto 1 es un autovalor de A (véase el problema resuelto 2).

Los autovalores de A serán entonces λ_1, λ_2, 1 y 2.

Se tiene que $\operatorname{Tr} A = 1 + 0 - 2 + 6 = 5$.

$|A| = 2$, dejando su comprobación al lector.

Teniendo en cuenta la observación de la definición 1.4 se verifica

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + 1 + 2 = 5, \text{ de donde } \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ &\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot 1 \cdot 2 = 2, \text{ de donde } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

Entonces λ_1 y λ_2 son las soluciones de la ecuación de segundo grado $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, es decir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$.

Luego A tiene el autovalor 1, que es triple y el autovalor 2, que es simple.

---

5. *¿Son semejantes las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

SOLUCIÓN:

$\operatorname{Tr} A = 1 + 2 + 4 + 4 = 11$. $\operatorname{Tr} B = 1 + 3 + 0 + 4 = 8$.

Si fuesen semejantes tendrían el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos autovalores. En consecuencia, la suma de todos los autovalores (que es la traza) debería ser idéntica. Como $\operatorname{Tr} A \neq \operatorname{Tr} B$, las matrices no son semejantes.

---

6. ***Calcular los autovalores y subespacios invariantes asociados a las matrices***

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ii)\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

i)

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left((1-\lambda)(3-\lambda) + 1\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

Los autovalores son $\lambda = 1$ simple y $\lambda = 2$ doble.

a) El subespacio asociado a $\lambda = 1$, $N_{11} = \ker(A - I)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{cases} 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \mu \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \mu \end{cases}$$

luego, $N_{11} = L\{(1,0,1)\}$.

b) El subespacio asociado a $\lambda = 2$, $N_{12} = \ker(A - 2I)$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \implies N_{12} = L\{(2,1,1)\}$$

ii)

$$P(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left((5-\lambda)(-1-\lambda) + 8\right) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$$= (3-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Autovalores $\lambda = 1$ simple y $\lambda = 3$ doble.

a) El subespacio asociado a $\lambda = 1$, $N_{11} = \ker(B - I)$ es

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_3 = \mu \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

luego $N_{11} = L\{(1,0,1)\}$.

b) El subespacio asociado a $\lambda = 3$, $N_{13} = \ker(B - 3I)$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde una ecuación implícita de N_{13} es $x_1 - 2x_3 = 0$.

Por tanto $N_{13} = L\{(2,0,1), (0,1,0)\}$

---

10. *Estudiar para qué valores de t reales la matriz A es "diagonalizable en el campo real", siendo*

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & t^2-10 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{vmatrix} t+3-\lambda & t^2-10 \\ 1 & t+1-\lambda \end{vmatrix} = t^2 + 4t - 2\lambda t - 4\lambda + \lambda^2 + 3 - t^2 + 10$$

Es decir, $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 2(t+2)\lambda + 4t + 13$. Sus raíces son

$$\lambda = \frac{2(t+2) \pm \sqrt{4(t+2)^2 - 4(4t+13)}}{2} = t + 2 \pm \sqrt{t^2 - 9}$$

Entonces

i) Si $t^2 - 9 < 0$, es decir, $t \in (-3,3)$, la matriz no es diagonalizable en el campo real, ya que los autovalores son números complejos.

ii) Si $t^2 - 9 > 0 \iff t \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$, la matriz A tiene dos autovalores reales distintos, luego es diagonalizable.

iii) Si $t^2 - 9 = 0$, entonces $t = \pm 3$ y la matriz tiene un autovalor doble.

a) $t = 3 \implies \lambda = 5$ doble.

$$\dim N_{15} = 2 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

que es distinto de la multiplicidad del autovalor. Por tanto, A no es diagonalizable (J sería $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$).

b) $t = -3 \implies \lambda = -1$ doble.

$$\dim N_{1,-1} = 2 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

que no coincide con la multiplicidad del autovalor. Por tanto, A no es diagonalizable (J sería $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$).

———— • ————

11. *De una matriz A se sabe que el conjunto de sus autovalores (espectro de la matriz) es $\{1, -1, 6\}$. Además se tiene*

- $\dim N_{11} = \dim N_{21} = 1$.
- $\dim N_{1,-1} = 1$.
- $\dim N_{2,-1} = 2$.
- $\dim N_{3,-1} = \dim N_{4,-1} = 3$.
- $\dim N_{16} = \dim N_{26} = 1$.

¿Cuál es la forma canónica de Jordan de A?

SOLUCIÓN:

$\lambda = 1$ es autovalor simple, y (1) es su caja asociada.

$\lambda = -1$ es autovalor triple; $N_{1,-1} \subset N_{2,-1} \subset N_{3,-1} = N_{4,-1}$; su caja asociada tiene tantos unos por debajo de la diagonal principal como vectores no propios, es decir, que será $\dim N_{3,-1} - \dim N_{1,-1} = 3 - 1 = 2$; por tanto, su caja asociada es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 6$ es autovalor simple, su caja es (6).

Entonces

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

———— • ————

12. *Se considera la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide

i) Probar que es diagonalizable y determinar una matriz P que permita la diagonalización, calculando la forma canónica de Jordan de A.

ii) Diagonalizar A^2 y A^{-1}.

SOLUCIÓN:

i) Calculamos los autovalores de A

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(-\lambda-2) = -(2-\lambda)^3(\lambda+2)$$

Los autovalores son $\lambda = -2$ simple y $\lambda = 2$ triple.

$$\dim N_{12} = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

que es la multiplicidad del autovalor 2.

Entonces A es diagonalizable siendo una posible forma canónica de Jordan J

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculemos una base de vectores propios y tendremos así una matriz de paso P.

a) Subespacio N_{12}. Calculamos $\ker(A-2I)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \quad -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \gamma \end{cases}$$

Una base de N_{12} puede ser $B_{N_{12}} = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\}$.

b) Subespacio $N_{1,-2}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left. \begin{array}{r} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Unas ecuaciones paramétricas de $N_{1,-2}$ pueden ser

$$x_1 = -\lambda, \qquad x_2 = x_3 = x_4 = \lambda.$$

Por tanto, la base de $N_{1,-2} \equiv B_{N_{1,-2}} = \{(-1,1,1,1)\}$.

Una matriz de paso puede ser

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Si u es un autovector de A asociado al autovalor λ, u es también autovector de A^n asociado al autovalor λ^n. Por tanto,

$$A^2 = PJ^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Además, si λ es autovalor de multiplicidad r de la matriz regular A, entonces $\dfrac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1} de multiplicidad r.

Como $A = PJP^{-1}$ entonces $A^{-1} = PJ^{-1}P^{-1}$ y por ser J diagonal se tiene que

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

---

13. *Calcular las posibles formas canónicas de Jordan de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

y sus respectivas matrices de paso.

SOLUCIÓN:

Calculamos primero los autovalores de A

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 & 13 \\ 5 & 3-\lambda & 7 \\ -9 & -4 & -12-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 5 & 3-\lambda & 7 \\ -9 & -4 & -12-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 2 \\ -9 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(\lambda+1)$$

luego los autovalores de A son $\lambda = 1$ doble y $\lambda = -1$ simple.
Veamos la dimensión que tiene el subespacio invariante asociado a $\lambda = 1$, $N_{11} = \ker(A-I)$.
Para ello calculamos el rango de $(A-I)$.

$$\operatorname{rang}(A-I) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 9 & 4 & 13 \\ 5 & 2 & 7 \\ -9 & -4 & -13 \end{pmatrix} = 2$$

por tanto, $\dim N_{11} = 3-2 = 1 \neq 2$, al no coincidir con la multiplicidad del autovalor 1, la forma canónica de Jordan asociada a A no es diagonal.

Para el subespacio $N_{11} = \ker(A-I)$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 13 \\ 5 & 2 & 7 \\ -9 & -4 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 9x+4y+13z = 0 \\ 5x+2y+7z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

por tanto, $N_{11} = L\{(1,1,-1)\}$.

Calculamos $N_{21} = \ker(A-I)^2$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -16 & -8 & -24 \\ -8 & -4 & -12 \\ 16 & 8 & 24 \end{pmatrix}$$

como $\operatorname{rang}(A-I)^2 = 1 \Longrightarrow \dim N_{21} = 3-1 = 2$, por tanto, la cadena se estaciona en N_{21}. $N_{11} \subset N_{21} = N_{31}$

$$\begin{pmatrix} -16 & -8 & -24 \\ -8 & -4 & -12 \\ 16 & 8 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x+y+3z=0 \iff \begin{cases} x = t \\ y = -2t-3s \\ z = s \end{cases}$$

esto es $N_{21} = L\{(1,-2,0),(0,-3,1)\}$.

Sea $u_1 \in N_{21} - N_{11}$, por ejemplo, $u_1 = (1,-2,0)$.

$$u_2 = (A-I)u_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 13 \\ 5 & 2 & 7 \\ -9 & -4 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_2 \in N_{11}$$

Debemos escoger $u_3 \in N_{1,-1} = \ker(A+I)$. Resolvemos entonces

$$\begin{pmatrix} 11 & 4 & 13 \\ 5 & 4 & 7 \\ -9 & -4 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 11x+4y+13z=0 \\ 5x+4y+7z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\mu \\ y = -\mu/2 \\ z = \mu \end{cases}$$

luego $N_{1,-1} = L\{(-1,-1/2,1)\}$. Entonces, un posible vector u_3 es $u_3 = (-1,-1/2,1)$.

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} Au_1 &= (A-I)u_1 + u_1 = u_1 + u_2 \\ Au_2 &= u_2 \\ Au_3 &= -u_3 \end{aligned}$$

se tienen los siguientes casos

i) En $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ la matriz de Jordan asociada a A es J_1.

$$J_1 = P_1^{-1}AP_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{con} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) En $B_2 = \{u_3, u_1, u_2\}$

$$J_2 = P_2^{-1}AP_2 = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{con} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

iii) En $B_3 = \{u_2, u_1, u_3\}$

$$J_3 = P_3^{-1}AP_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{con} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) En $B_4 = \{u_3, u_2, u_1\}$

$$J_4 = P_4^{-1}AP_4 = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{con} \quad P_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

———— • ————

14. ***Calcular la forma canónica de Jordan y una matriz de paso de las siguientes matrices***

$$i) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ii) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

i)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4.$$

Luego tiene el autovalor $\lambda = 2$ con multiplicidad 4.

$$\dim N_{12} = 4 - \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

El subespacio propio asociado a $\lambda = 2$, $N_{12} = \ker(A - 2I)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \end{matrix} \iff \begin{cases} x_1 = -3\lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \lambda \end{cases}$$

Una base de dicho subespacio es $B_{N_{12}} = \{(-3,0,0,1), (0,1,0,0)\}$.

Calculemos la dimensión de N_{22}.

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim N_{22} = 4 - \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Por lo tanto, la cadena de subespacios, en este caso, es $N_{12} \subset N_{22} \subset N_{32}$ con $\dim N_{12} = 2$, $\dim N_{22} = 3$ y $\dim N_{32} = 4$.

Como $\dim N_{32} = 4$ entonces $N_{32} = \mathbb{R}^4$.

Calculemos N_{22}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_3 = 0$$

Sea $v_1 \in N_{32} - N_{22}$, por ejemplo, $v_1 = (0,0,1,0)$.

$$(A-2I)v_1 = v_2 \in N_{22} - N_{12} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = (3,0,0,1)$$

$$v_3 = (A-2I)v_2 \in N_{12} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_3 = (0,6,0,0)$$

Como $\dim N_{12} = 2$ podemos elegir $v_4 \in N_{12}$, linealmente independiente con v_3, por ejemplo $v_4 = (-3,0,0,1)$.

En la base $B^* = \{(0,0,1,0), (3,0,0,1), (0,6,0,0), (-3,0,0,1)\}$ la matriz del endomorfismo será

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

siendo J la forma canónica de Jordan de A.

Una matriz de paso puede ser

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4$$

El único autovalor es $\lambda = 2$ de multiplicidad 4.

Calculamos la dimensión del subespacio invariante asociado a 2.

$$\dim N_{12} = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Veamos cual es la dimensión de N_{22}, para ello calculamos $(A - 2I)^2$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim N_{22} = 4$$

La cadena de subespacios en este caso es $N_{12} \subset N_{22} = \mathbb{R}^4$ con $\dim N_{12} = 2$ y $\dim N_{22} = 4$.

Podemos elegir en este caso v, $w \in N_{22}/N_{12}$, linealmente independientes.

Calculamos N_{12}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$v = (0,1,0,0)$ y $w = (1,1,0,0)$ son vectores linealmente independientes que no están en N_{12}. Por tanto, se tiene

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La forma canónica será entonces

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Una matriz de paso P en la cual la forma canónica de Jordan es J puede ser

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J es la matriz del endomorfismo en la base

$$B^* = \{(0,1,0,0),(0,0,1,1),(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}.$$

---

15. *Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^5$. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^5$ del que se conoce*

a) $f(e_2) = -e_2$.

b) $f(e_3 + e_4) = e_3 + e_4$.

c) $f(e_5) = 2e_5 + e_1 - e_2$.

d) El polinomio característico de f tiene la raíz triple 2.

e) Las ecuaciones implícitas, respecto de la base B, del núcleo del endomorfismo $f - 2I$ (donde I es el endomorfismo identidad de $\mathbb{R}^5$) son

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Calcular

i) la forma canónica de Jordan de f, así como la matriz de f respecto de la base B.

ii) una matriz de paso.

SOLUCIÓN:

i) $f(e_2) = -e_2$ por tanto $\lambda = -1$ es un autovalor de f.

$f(e_3 + e_4) = e_3 + e_4$ entonces $\lambda = 1$ es un autovalor de f.

Como $\lambda = 2$ es autovalor de multiplicidad 3 entonces 1 y -1 son autovalores simples.

Además, $N_{12} = \ker(f - 2I) = L\{e_1 - e_2, e_1 - e_3 + e_4\}$, por tanto, $\dim N_{12} = 2$ de donde

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $A = M(f, B, B)$. Sabemos que

$$\begin{cases} f(e_3) + f(e_4) = e_3 + e_4 \\ f(e_1) - f(e_2) = 2e_1 - 2e_2 \\ f(e_1) - f(e_3) + f(e_4) = 2e_1 - 2e_3 + 2e_4 \end{cases}$$

Como $f(e_2) = -e_2 \quad\Longrightarrow\quad f(e_1) = 2e_1 - 2e_2 - e_2 = 2e_1 - 3e_2$. Sumando la primera y la tercera ecuación y sustituyendo $f(e_1)$ obtenemos

$$2f(e_4) = 2e_1 - e_3 + 3e_4 - 2e_1 + 3e_2 = 3e_2 - e_3 + 3e_4$$

$$f(e_4) = \frac{3}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 + \frac{3}{2}e_4$$

$$f(e_3) = e_3 + e_4 - f(e_4) = -\frac{3}{2}e_2 + \frac{3}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4$$

Además, $f(e_5) = e_1 - e_2 + 2e_5$, luego

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -3/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ii) $N_{12} \subset N_{22}$. Como $f(e_5) = 2e_5 + e_1 - e_2$ entonces

$$e_1 - e_2 = (f - 2I)e_5 \in N_{12} \implies (f - 2I)^2 e_5 = 0 \implies e_5 \in N_{22}.$$

Por tanto, como $e_5 \notin N_{12}$ se tiene que $e_5 \in N_{22} - N_{12}$. Escogemos $u_1 = e_5$

$$u_2 = (A - 2I)u_1 = (f - 2I)e_5 = e_1 - e_2 \in N_{12}$$
$$u_3 = (1, 0, -1, 1, 0) \in N_{12}$$

que es linealmente independiente con u_2.

$u_4 = e_2 \in N_{1,-1}$ y $u_5 = e_3 + e_4 \in N_{11}$, entonces J es la matriz de f en la base $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, luego

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16. *De un endomorfismo f de $\mathbb{R}_2[x] = \{a + bx + cx^2 \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ se sabe*

a) Tiene un único subespacio invariante $N = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ p(x)$ no tiene término en $x\}$.

b) El inverso de f es $f^{-1} = -f^2 - 3f - 3I$, siendo I el endomorfismo identidad de $\mathbb{R}_2[x]$.

c) $f(x) = 1 + \alpha x + x^2$, siendo α un número real fijo que debe determinarse.

Se pide

i) Hallar la matriz A de f respecto de la base $\{1, x, x^2\}$.

ii) Encontrar la forma canónica de Jordan de la matriz A y la matriz de paso correspondiente.

SOLUCIÓN:

i) Sea λ_0 el único autovalor de f, λ_0 ha de ser de multiplicidad tres y el polinomio característico de f, será $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^3$, entonces por el teorema de Cayley-Hamilton, $P(A) = (A - \lambda_0 I)^3 = \mathcal{O}$.

$I = f \circ f^{-1} = -f^3 - 3f^2 - 3f$ y entonces $(f + I)^3 = 0$. Por tanto, $(A + I)^3 = \mathcal{O}$. En consecuencia, $\lambda_0 = -1$ y el subespacio $N = N_{1,-1}$.

Como $1, x^2 \in N = N_{1,-1}$, $f(1) = -1$ y $f(x^2) = -x^2$. De donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Tr} A = -2 + \alpha = -3$ ya que A tiene $\lambda = -1$ como autovalor triple, por tanto $\alpha = -1$ siendo entonces

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Sabemos que $\dim N_{1,-1} = 2$ por tanto $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos una matriz P tal que $J = P^{-1}AP$.

$N_{1,-1} \subset N_{2,-1}$ con $\dim N_{2,-1} = 3 \implies N_{2,-1} = \mathbb{R}_2[x]$.

Sea $u_1 \notin N_{1,-1} = L\{1, x^2\}$, por ejemplo, $u_1 = (0, 1, 0) = x$. Entonces

$$u_2 = (A + I)u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sea $u_3 \in N_{1,-1}$ linealmente independiente con u_2, por ejemplo, $u_3 = (1, 0, 0)$.

Entonces, una matriz P puede ser $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. *Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y A la matriz de un endomorfismo referida a dicha base. En dicho endomorfismo, los subespacios*

$$V_1 \equiv x + y + z = 0 \qquad\qquad V_2 \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

están asociados respectivamente a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Se pide

i) Forma canónica de Jordan.

ii) Calcular la matriz $M = 2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I$.

iii) Calcular la matriz $N = A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} + 4I$.

SOLUCIÓN:

i) $\lambda = 1$ es un autovalor doble y $\dim N_{11} = 2$; $\lambda = \frac{1}{2}$ es un autovalor simple, por lo tanto la forma canónica de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ii) El polinomio característico de J, que es el mismo que el de A, es

$$P(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - \frac{1}{2}) = -\left(\lambda^3 - \frac{5}{2}\lambda^2 + 2\lambda - \frac{1}{2}\right).$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton se tiene

$$2A^3 - 5A^2 + 4A - I = \mathcal{O} \implies 2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A = \mathcal{O} \implies$$
$$\implies 2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I = -2A^3 + 5A^2 - 4A + I = \mathcal{O}.$$

iii) Los autovalores de la matriz A^{-1} son $\lambda = 1$ doble y $\lambda = 2$ simple y su forma canónica de Jordan es

$$J^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $P(\lambda) = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2)$.

$$A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} - 2I = \mathcal{O} \implies A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} + 4I = 6I.$$

21. *Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo y A su matriz asociada. Se sabe que una base del núcleo del endomorfismo, cuya matriz asociada es $A - I$ está constituida por los vectores $(1,1,0)$ y $(1,0,1)$ y que en el endomorfismo dado por A la imagen del vector $(0,2,1)$ es el vector $(1,1,0)$. Se pide*

i) Autovalores y subespacios invariantes de f.
ii) Forma canónica de Jordan y matriz de paso.
iii) Clasificar dicho endomorfismo.
iv) Obtener los subespacios invariantes de A^n.
v) Hallar A y A^n.

SOLUCIÓN:

i) Al ser $f(1,1,0) = (1,1,0)$ y $f(1,0,1) = (1,0,1)$, esos vectores son vectores propios asociados al autovalor $\lambda = 1$.

Además existen dos vectores con la misma imagen

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1,0) = (1,1,0) \\ f(0,2,1) = (1,1,0) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f(1,1,0) - f(0,2,1) = f(1,-1,-1) = (0,0,0)$$

lo cual quiere decir que $(1,-1,-1)$ es un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 0$.

Los autovalores son $\lambda = 0$, simple y $\lambda = 1$, doble. Los subespacios invariantes son

$$N_{10} = L\{(1,-1,-1)\} \qquad \text{y} \qquad N_{11} = L\{(1,1,0),(1,0,1)\}.$$

ii) f es diagonalizable. Una posible forma canónica de Jordan es $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y una matriz de paso puede ser $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, siendo entonces $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

iii) El endomorfismo no es inyectivo puesto que $\lambda = 0$ es un autovalor y como consecuencia tampoco es sobreyectivo.

iv) Los subespacios invariantes de A^n son los mismos que los de A.

v) $A = PJP^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

$A^n = PJ^nP^{-1}$. Como $J^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$ entonces $A^n = PJP^{-1} = A$.

26. *Calcular e^A en los siguientes casos*

i) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{n\times n}$ *ii)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}$

iii) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{n\times n}$ *iv)* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:

i) Si $A = \lambda I_n$ entonces

$$\begin{aligned} e^A = e^{\lambda I_n} &= I_n + \lambda I_n + \frac{1}{2!}(\lambda I_n)^2 + \cdots + \frac{1}{K!}(\lambda I_n)^K + \cdots \\ &= I_n + \lambda I_n + \frac{\lambda^2}{2!} I_n + \cdots + \frac{\lambda^K}{K!} I_n + \cdots \\ &= (1 + \lambda + \cdots + \frac{\lambda^K}{K!} + \cdots) I_n = e^\lambda I_n = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^\lambda & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ii) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A^n = \mathcal{O}$$

Al ser A nilpotente de orden n, se tiene que

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1} =$$

$$= I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{1!} & 1 & & & & \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Sea $A = \lambda I_n + B$ con $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $e^A = e^{\lambda I_n} e^B = e^\lambda e^B$, es decir,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^\lambda}{1!} & e^\lambda & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{e^\lambda}{(n-1)!} & \frac{e^\lambda}{(n-2)!} & \cdots & e^\lambda \end{pmatrix}$$

iv)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$e^A = e^{aI_2} e^{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} = e^a e^{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} = e^a e^B$$

Calculamos e^B

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}, B^4 = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}, \cdots$$

Por tanto

$$e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix} + \cdots$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} + \cdots & b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} + \cdots \\ -b + \frac{b^3}{3!} - \frac{b^5}{5!} + \cdots & 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} + \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & \operatorname{sen} b \\ -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

Entonces $e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & \operatorname{sen} b \\ -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$.

---

27. ***Dadas las matrices***

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide

i) Hallar e^A y e^B.
ii) Calcular e^{At} y e^{Bt}.

SOLUCIÓN:

i) $A = \left(\begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right)$, siendo $J_1 = (-2)$ y $J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Se tiene que

$$e^A = \left(\begin{array}{c|c} e^{J_1} & \\ \hline & e^{J_2} \end{array}\right)$$

con

$$e^{J_1} = e^{-2} \text{ y } e^{J_2} = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

Análogamente

$$e^B = e^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/1! & 1 & 0 \\ 1/2! & 1/1! & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ e^3 & e^3 & 0 \\ e^3/2 & e^3 & e^3 \end{pmatrix}$$

ii)

$$e^{At} = \left(\begin{array}{c|c} e^{-2t} & \\ \hline & e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} t} \end{array}\right)$$

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t/1! & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Análogamente

$$e^{Bt} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/1! & 1 & 0 \\ t^2/2! & t/1! & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} & 0 \\ e^{3t}(t^2/2) & te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

3. *Sea* $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un endomorfismo que admite por vectores propios a* $(0,1,-2)$, $(1,0,4)$ *y* $(1,0,-2)$. *Sabiendo que* $f(0,1,0)$ *es* $(2,1,2)$ *hallar los autovalores del endomorfismo* f.

5. *Estudiar si son semejantes las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 8 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 11 & 6 \\ 11 & 0 & 6 & 3 \\ -7 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

6. *Calcular el polinomio característico, utilizando los menores principales de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 3 & -3 & 9 \\ 5 & 1 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

14. *Calcular la forma canónica de Jordan y la matriz de paso de las siguientes matrices*

i) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *ii)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ *iv)* $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 3 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

15. *Estudiar para qué valores de los parámetros a y b, la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

es diagonalizable, calculando

i) Forma canónica de Jordan y la matriz de paso para los valores $a = -1$ y $b = -1$.
ii) Forma canónica de Jordan y matriz de paso para $a = 1$ y $b = 10$. Calcular en este caso A^{129}.

16. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *calcular*

i) A^n.
ii) Subespacios invariantes de A^n.
iii) A^{-2}.

25. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. *Se pide*

i) Encontrar la forma canónica de Jordan asociada a cada una de ellas.
ii) Calcular e^A *y* e^B.

26. *Calcular* e^{At} *en los siguientes casos*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

BIBLIOGRAFÍA

De La Villa, A.; '*Problemas de álgebra con esquemas teóricos*''. CLAGSA 1998.